PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

Soit α un nombre réel donné et $A_\alpha(x) = x^2 + \alpha$.

1° Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $B_\alpha(x)$ de degré 4, que l'on déterminera, tel que :

$$A_\alpha \circ B_\alpha = B_\alpha \circ A_\alpha \left(\text{c'est-à-dire } A_\alpha\,(B_\alpha(x)) = B_\alpha\,(A_\alpha(x))\right).$$

2° Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour chacune desquelles il existe un polynôme $C_\alpha(x)$ de degré 3 tel que $A_\alpha \circ C_\alpha = C_\alpha \circ A_\alpha$.

Montrer (de préférence sans calculs d'identification) que l'on a alors $B_\alpha \circ C_\alpha = C_\alpha \circ B_\alpha$.

3° Pour tout entier naturel n déterminer les polynômes $p_n(x)$ de degré n et tels que $p_n(x^2) = p_n^2(x)$.

II

Soit φ la fonction définie pour tout nombre complexe non nul z par $\varphi(z) = z + \frac{1}{z}$. On a donc, pour tout entier naturel k, $\varphi^k(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^k$ et $\varphi(z^k) = z^k + \frac{1}{z^k}$. On fait la convention habituelle $z^0 = 1$, d'où $\varphi(z^0) = 2$ et $\varphi^0(z) = 1$.

1° Montrer que si l est un entier naturel quelconque, comme l'est k :

$$\varphi(z^k)\,\varphi(z^l) = \varphi(z^{k+l}) + \varphi(z^{|k-l|})$$

et exprimer, en particulier, $\varphi^2(z^k)$ en fonction de $\varphi(z^{2k})$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'espace vectoriel E_n des combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions $\varphi(z^k)$, $(0 \leqslant k \leqslant n)$, est identique à l'espace vectoriel des combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions $\varphi^k(z)$, $(0 \leqslant k \leqslant n)$. On montrera que

$$B_n = \left(\varphi(z^0), \varphi(z), \ldots, \varphi(z^n)\right) \quad \text{et} \quad C_n = \left(\varphi^0(z), \varphi(z), \ldots, \varphi^n(z)\right)$$

sont deux bases de E_n.

2° Déterminer l'ensemble Γ des valeurs de z pour lesquelles $\varphi(z) \in \mathbf{R}$.

L'application $\varphi : \Gamma \to \mathbf{R}$ est-elle surjective?

3° Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme $T_n(x)$ et un seul, de degré n, à coefficients réels et tel que $T_n(\varphi(z)) = \varphi(z^n)$.

Il n'est pas demandé d'expliciter les coefficients de T_n, mais on écrira une relation qui permet d'exprimer T_{n+1} à l'aide de T_n et de T_{n-1}.

Écrire les polynômes T_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Indiquer, pour tout entier $n \geqslant 1$ les valeurs de $T_n(x)$ en $x = 2$, $x = -2$, $x = 10{,}1$, $x = 0$ et $x = -1$.

III

1° Pour tout entier $n \geqslant 1$ déterminer les polynômes $P_n(x)$, à coefficients réels, de degré n, et tels que

$$P_n(x^2 - 2) = P_n^2(x) - 2$$

Il est conseillé, pour cela, de poser $x = \varphi(z)$, d'écrire $P_n(\varphi(z))$ dans la base B_n : $P_n(\varphi(z)) = a_n\varphi(z^n) + a_{n-1}\varphi(z^{n-1}) + \ldots$ et de montrer que l'on a $a_n = 1$ et $a_k = 0$ pour $k < n$.

2° Comparer $P_n \circ P_m$ et $P_m \circ P_n$ $\quad (m, n \geqslant 1)$

Comment faut-il choisir le polynôme P_0, de degré 0, pour avoir $P_n \circ P_0 = P_0 \circ P_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$?

IV

On se propose de déterminer les suites de polynômes $Q_n(x)$, $(n \in \mathbf{N})$, Q_n de degré n, à coefficients réels et tels que, pour tout couple d'entiers (m, n) on ait

(1) $$Q_m \circ Q_n = Q_n \circ Q_m$$

Pour cela,

1° Soit $l(x) = \lambda x + \mu$, avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, d'où

$$l^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x - \frac{\mu}{\lambda}.$$

.../...

Montrer que si une suite Q_n vérifie (1) il en est de même de la suite

$$Q_n^* = l^{-1} \circ Q_n \circ l$$

2° Montrer que l'on peut déterminer l de sorte que

$$Q_2^*(x) = x^2 + \alpha \qquad (\alpha \in \mathbf{R}) .$$

En utilisant alors les résultats trouvés en (I, 2), (I, 3) (III, 1) et (III, 2) en déduire toutes les suites Q_n possibles.

V

Soit T_n les polynômes définis en II, 3.

1° Exprimer $T_{n+m} + T_{|n-m|}$ et $T_{n+m} \cdot T_{|n-m|}$ à l'aide de T_n et de T_m.

2° Que peut-on dire du polynôme $(4 - x^2)\, T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2\, T_n(x)$? ($T'$ et T'' sont les dérivées premières et secondes de T).

3° On considère l'équation différentielle du second ordre (2)

$$(4 - x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0 \tag{2}$$

où λ est un nombre réel donné.

Chercher des solutions de cette équation sous forme de séries entières en x. Préciser les rayons de convergence. Pour quelles valeurs de λ l'équation (2) possède-t-elle un polynôme comme solution?

En déduire une expression explicite des polynômes T_n.

(On sera conduit à distinguer les cas n pair et n impair).

VI

On considère la récurrence $u_{n+1} + u_{n-1} = a u_n$ où a est un nombre réel donné.

1° Exprimer u_n à l'aide de u_0, u_1, n dans le cas $a = 2$, et dans le cas $a = -2$.

2° Dans le cas $a^2 \neq 4$, exprimer u_n à l'aide de u_0, u_1, a, $T_n(a)$ et $T_{n+1}(a)$.

3° On considère la récurrence, $v_{n+1} . v_{n-1} = v_n^2 + b$ où b est un nombre réel donné.

Montrer qu'elle permet de calculer v_n à partir de v_0 et v_1 tant que $\forall p \leqslant n - 2 : v_p \neq 0$.

Montrer que v_n vérifie une récurrence du type $v_{n+1} + v_{n-1} = k v_n$ pour une valeur convenable de k.

En déduire l'expression de v_n en fonction de v_0 et v_1 .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail